数理解析研究所講究録
第 883 巻 1994 年 97-110

Gauge Theory on Resolutions of Simple Singularities and Simple Lie Algebras

東北大理学部 中島 啓 (HIRAKU NAKAJIMA)

INTRODUCTION

この論説の目的は、ALE space と呼ばれる空間上のゲージ理論の筆者の最近の研究に関する survey である。ALE space は複素解析幾何的には、simple singularity の deformation や、その resolution の空間に hyper-Kähler metric (Ricci-flat Kähler metric といっても同値である) を入れたものと理解すればよい。そのような metric が存在することは、Kronheimer [Kr] によって示されたのだが、その metric に関して、anti-self-dual (ASD) connection の framed moduli space を考えると、(あるいは Theorem 2.7 によって holomorphic vector bundle の framed moduli space にといってもよいが、) base space のいろいろな性質が遺伝することが示される。とくに framed moduli space は hyper-Kähler metric を持つ。

framed moduli space の性質を詳しく研究するときに有効な道具となるのが、Kronheimer-Nakajima [KN] による ADHM description である。これは、framed moduli space と箙 (えびら) の表現の moduli space の間に一対一対応があるというもので、framed moduli space という偏微分方程式の解から来るものが有限次元のある種の行列の空間で記述されてしまうわけである。但し、この記述では幾何学的直感が失なわれてしまうので、この論説では用いない。箙の記述では、simple Lie algebra、または Dynkin 図式に限らず、一般の symmetric Kac-Moody algebra に対応する空間が考えられることを注意するにとどめる。(これを箙多様体と呼ぶ。)

Lusztig は、Ringel による箙の表現による量子展開環の上三角部分の構成に触発されて、箙の表現の空間を用いて canonical base の構成をおこなった。[Lu] おどろくべきことに、これは上の framed moduli space との対応によって完全に幾何学的に説明される。(証明の細いところで箙の表現にたちかえることが必要になるが) ここで

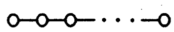
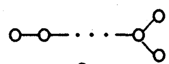
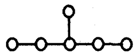
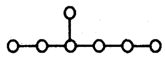
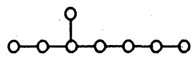
Supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Reserch (No. 03740014), Ministry of Education, Science and Culture, Japan

は、quantized version でなく、classical な場合しか述べないが、simple Lie algebra の表現が、Hecke correspondence と呼ばれる図式を用いて構成される。

simple singularity と simple Lie algebra は Dynkin 図式を通じて対応関係があることが古くより知られていたが、それらは Cartan subalgebra の部分しか対応させていないとも言え、我々の新しい対応はより完全な対応と言ってよいだろう。

1. Simple Singularities

simple singularity (単純特異点) とは、SU(2) のある有限部分群Γに対して $\mathbb{C}^2/\Gamma$ とかけるような特異点のことで、古くからよく研究されている。分類も与えられており、すべて $\mathbb{C}^3$ 内の超曲面として書ける。その minimal resolution の exceptional set の双対グラフを描くと Dynkin 図式に二重線のないもの (すなわち ADE 型) が現れることが知られている。(下表を参照) また、Brieskorn[Br], Slodowy[Sl] によれば、Dynkin 図式に対応する simple Lie algebra の nilpotent variety を使うことによって $\mathbb{C}^2/\Gamma$ を構成することが出来、さらにその semi-universal deformation とその simultaneous resolution を Lie 環の言葉を用いて構成することが可能である。我々が使うのは、具体的な構成法ではなくてその存在することで十分なので、これらについて興味がある方は上にあげた文献に直接あたっていただきたい。

ルート系	有限群 Γ	Dynkin 図式	超曲面
A_n	位数 $n+1$ の巡回群		$x^{n+1}+yz=0$
D_n	位数 $4(n-2)$ の二項二面体群		$x^2+y^2z+z^{n-1}=0$
E_6	二項四面体群		$x^2+y^3+z^4=0$
E_7	二項八面体群		$x^2+y^3+yz^3=0$
E_8	二項二十面体群		$x^2+y^3+z^5=0$

もう一つ別の simple singularity と、simple Lie algebra の対応は、McKay [Mc] によって次のように与えられた。$\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ を Γ の既約表現の isomorphism classes としよう。ρ_0 は trivial representation であると約束しておく。inclusion $\Gamma \subset SU(2)$ から導かれる 2 次元表現を ρ_Q と表す。このとき、$(n+1)\times(n+1)$ 行列 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ を

$$\rho_i \otimes \rho_Q = \bigoplus_j \rho_j^{\oplus a_{ij}}$$

によって定義する。このとき、McKay が指摘したのは $2\mathbf{I}-\mathbf{A}$ が extended Cartan matrix になり、対応する Dynkin 図式は上で与えられたものと一致するということである。さらに、ρ_0 に対応する行と列を除いたものが通常の Cartan matrix になる。

さて、X を simple singularity から deformation および resolution をして得られる複素曲面とする。さらに、それは nonsingular であるとする。このとき、Kronheimer は X 上に "良い" 性質をもった計量が存在することを証明した。

Theorem 1.1 [Kr]. *X 上には、order 4 の ALE hyper-Kähler metric の族が存在する。*

上にでてきた言葉の説明をしよう。まず、Riemannian manifold (M, g) 上の hyper-Kähler 構造とは、almost complex structure の三つの組 I, J, K であって、四元数の関係式 $IJ = -JI = K$ を満たし、g の Levi-Civita 接続 ∇ に関して平行 (i.e. $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$) であるものをいう。hyper-Kähler 構造を許す Riemannian metric を単に hyper-Kähler metric ということにする。複素構造 I によって Kähler 多様体と思ったときに、J と K に関する Kähler form を用いて $\omega_J + i\omega_K$ を考えると、nowhere vanishing な closed 正則 2 形式になる。すなわち holomorphic symplectic form である。上の定理の場合には、X のもともとの複素構造が I に一致するように hyper-Kähler 構造を与えることができる。

また、4 次元 Riemannian manifold (X, g) が ALE of order τ とは、あるコンパクト集合 $K \subset X$ と有限部分群 $\Gamma \subset SO(4)$ と $X \setminus K$ 上定義された diffeomorphism (a coordinate system at infinity) $\mathfrak{X}: X \setminus K \to (\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R})/\Gamma$ が存在して、計量 g を座標 $\mathfrak{X}$ で表したときに

$$|\overbrace{\partial \cdots \partial}^{l \text{ times}}(g_{ij}(x) - \delta_{ij})| = O(|x|^{-l-\tau})$$

を満たすときをいう。

2. Gauge Theory on ALE spaces

ALE space 上の ASD connection の framed moduli spaces の構成は、[Na1] において行なわれている。厳密に議論するためには、weighted Sobolev norms を導入して、noncompact 多様体上の解析をきちんとやらなければいけないが、ここではそれを省略して滑かなものだけをとりあつかうこととする。

前節と同様に、X は複素曲面で単純特異点 $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の特異点解消か、その変型とし、ALE hyper-Kähler metric g が入っているとする。無限遠における座標系 $X \setminus K \to$

$(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R})/\Gamma$ を取って固定しておく。$\rho: \Gamma \to \mathrm{U}(r)$ をΓの表現とし、それに対応する $(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R})/\Gamma$ 上の rank が r の vector bundle $(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R}) \times_\Gamma \mathbb{C}^r$ 上の flat connection を固定しておく。X 上に hermitian vector bundle E があり、その制限 $E|X \setminus K$ と $(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R}) \times_\Gamma \mathbb{C}^r$ の間に無限遠の座標系を cover する bundle isomophism があるとする。さらに、E 上の connection A_0 で、その $X \setminus K$への制限が上でとった $(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R}) \times_\Gamma \mathbb{C}^r$ 上の flat connection に対応しているしているものが存在するとする。

instanton number k を次で定義する。

$$k = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \mathrm{tr}(R_{A_0} \wedge R_{A_0})$$

これは、A_0にはよらない。A_0 と A_0' がコンパクト集合の外で一致していれば、instanton number は等しい。

さてそこで、$\mathcal{A}$ を次の条件を満たす E 上の connections A の成す集合としよう。

$$(2.1) \qquad |\overbrace{\nabla_{A_0} \cdots \nabla_{A_0}}^{l \text{ times}}(A - A_0)| = O(r^{-3-l}),$$

但し、r は X のある点からの距離関数である。$\mathcal{G}_0$ を次をみたす gauge 変換 s の成す群とする。

$$(2.2) \qquad |\overbrace{\nabla_{A_0} \cdots \nabla_{A_0}}^{l \text{ times}}(s - \mathrm{id})| = O(r^{-2-l}).$$

これは、引き戻しによって $\mathcal{A}$ によって作用する。そこで anti-self-dual connection の framed moduli space を

$$\mathfrak{M}(c_1, k, \rho) = \mathfrak{M} \stackrel{\text{def.}}{=} \{A \in \mathcal{A} \mid *R_A = -R_A\}/\mathcal{G}_0,$$

によって定義する。但し、c_1 は、E の first Chern class である。§5 までは data c_1, k, ρ を fix するので、$\mathfrak{M}$ という notation を用いることにする。

ゲージ理論における標準的な議論と、ALE 空間における解析を用いて、筆者[Na1] は次を示した。もし、次の条件が満されると framed moduli space が gauge equivalence class $[A]$ の近傍で C^∞-manifold の構造をもつ。

$$0 = L^2\text{-}\operatorname{Ker} d_A^*: \Omega^+(\operatorname{Endskew} E) \to \Omega^1(\operatorname{Endskew} E),$$

但し、Endskew E は E の skew-adjoint endomorphism の成す vector bundle である。Weyl tensor の anti-self-duality と scalar curvature の vanishing を用いて、Bochner-Weitzenböck formula を利用すると、上の条件はいかなる ASD connection についても成立することを示すことができる。(see [Na1, 5.1]). よって、framed moduli space $\mathfrak{M}$ は smooth manifold である。その次元は、指数定理によって計算される。(see [Na1, 2.7]). さらに、$[A]$ における tangent space は、

$$L^2\text{-}\operatorname{Ker}(d_A^+ \oplus d_A^*)\colon \Omega^1(\operatorname{Endskew} E) \to \Omega^+(\operatorname{Endskew} E) \oplus \Omega^0(\operatorname{Endskew} E)$$

と同型である。特に、L^2-内積によって、$\mathfrak{M}$ 上に Riemannian metric が定義される。base space X 上の hyper-Kähler 構造 I, J and K は、cotangent bundle T^*X上の endomorphism を induce し、さらに、$L^2\text{-}\operatorname{Ker}(d_A^+ \oplus d_A^*)$ はそれらで不変に保たれる。よって、framed moduli space $\mathfrak{M}$ 上に 3 つの almost complex structure $I_{\mathfrak{M}}$, $J_{\mathfrak{M}}$, $K_{\mathfrak{M}}$ で quaternion relation を満すものが定義される。このとき、これらが L^2-計量の Levi-Civita connection に関して平行であることが示される。[Na1, 2.6] 以上の結果をまとめて、次を得る。

Theorem 2.3. *ALE space* (X, g) 上の *ASD connection* の *framed moduli space* $\mathfrak{M}$ は、*hyper-Kähler manifold* である。

先に進むまえに、我の framed moduli space と、ALE space の一点コンパクト化 $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ 上の ASD connection の framed moduli space の間の関係について述べよう。まず ALE condition から、$\widehat{X}$ に orbifold の構造を与え、X 上では元々の metric g に共形的であるような orbifold 計量があることを注意しておく。(See [Kr2, p.686].) 上に述べたような漸近挙動を持つ ASD connection は、$\widehat{X}$ 上に拡張され、それらは全て、ある固定された orbifold vector bundle $\widehat{E}$ 上に住んでいる。無限遠 ∞ における fiber $\widehat{E}$ は、ρ に同型なΓ-作用を持つ。このとき次を見るのは難しくない。

Proposition 2.4. 我々の *framed moduli space* $\mathfrak{M}$ は、$\widehat{E}$ 上の *ASD connection* の *framed moduli space*、すなわち次の組の *isomorphism class* の成す集合 *(*にしかるべく位相をいれたもの*)* と同相である。

$$(\widehat{E} \text{ 上の } \textit{ASD connection } A,\ \Gamma\textit{-equivariant isomorphism } \varphi\colon \widehat{E}_\infty \to \mathbb{C}^r).$$

次に、L^2-計量の完備性について議論する。framed moduli space $\mathfrak{M}$ 内の点列 $[A_i]$ が与えられたとしよう。Uhlenbeck の compactness theorem を orbifold $\widehat{X}$ 上で用いると、部分列 $[A_j]$ で次を満すものが存在する。

(1) ある有限集合 $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \widehat{X}$ であって、A_j を gauge transformation で動かすと、その集合の外である ASD connection A_∞ に収束するようにできる。

(2) ある定数 a_k $(k = 1, \ldots, n)$ が存在して、curvature densities $|R_{A_j}|^2 dV$ は、

$$|R_{A_\infty}|^2 dV + \sum_k a_k \delta_{x_k}.$$

に measure として収束する。

上の定数 a_k は、x_k の近傍から bubbling out する ASD connection の curvature integral と関係している。もし、x_kが $\widehat{X}$ の非特異点 (すなわち $x_k \in X$) であったとすると、a_k は $8\pi^2$ の整数倍である。一方、$x_k = \infty$ のときには、a_k は $8\pi^2/\#\Gamma$ の整数倍にしかならない。但し $\#\Gamma$ は、Γ の order である。次は、[KN, 9.2 and Remark following 9.2] において証明されている。

Proposition 2.5. *framed moduli space* $\mathfrak{M}$ 上の L^2-計量が、完備であるための必要十分条件は、任意の点列 $[A_i]$ が与えられたときに上の特異集合 Sが、$\emptyset$ か $S = \{\infty\}$ のいずれかにしかなりえないことである。

上の条件はつねに成り立つわけではないが、各 ALE space について、無限個の例で成立することが分る。また、first Chern class c_1 と instanton number k と表現 ρ の言葉でかけるある十分条件もある。[KN].

この節の最後に、ASD connection の framed moduli space $\mathfrak{M}$ と holomorphic vector bundle の framed moduli space の間の関係について述べる。これは、compact Kähler manifold のときに、Hitchin-Kobayashi correspondence と呼ばれていて、両者が一致するというものである。([Ko, Lü, Do, UY]) compact な場合には、holomorphic vector bundle が stable かどうかという微妙な性質がからんできて複雑なのであるが、我々の場合には Bando によって示されたように次のように simple なのである。

Theorem 2.6 [Ba]. *vector bundle* E 上の *connection* A で、(2.1) の *assymptotic behaviour* をもち、$\overline{\partial}_A \overline{\partial}_A = 0$ であるものが与えられたとする。このとき、E の *hermitian metric* を保つとは限らない *bundle isomorphism* s で(2.2) を満たすものが存在して、A を s で引き戻すと *ASD connection* にできる。

上のように connection A で、(2.1) と $\bar{\partial}_A\bar{\partial}_A = 0$ を満たすものの全体を $\mathfrak{Hol}$ とし、hermitian metric を保つとは限らない bundle isomorphism で、(2.2) を満たすのの全体を $\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$ とする。ASD connection A は、$\bar{\partial}_A\bar{\partial}_A = 0$ を満たす。よって、写像 $\mathfrak{M} \to \mathfrak{Hol}/\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$ を得る。このとき、上の定理を用いると compact Kähler manifold のときと同様に次の定理が得られる。

Theorem 2.7. 上の写像 $\mathfrak{M} \to \mathfrak{Hol}/\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$ は、全単射である。

より詳しく、$\mathfrak{Hol}/\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$ は、複素多様体としての構造を持つことが示され、上の写像も $\mathfrak{M}$ の複素構造 $I_{\mathfrak{M}}$ に関して biholomorphic map であることが示される。

3. S^1-ACTION

この節では、次を仮定する。

(3.1) base space X は、$\mathbb{C}^2/\Gamma$の minimal resolution of singularity である。

(3.2) framed moduli space $\mathfrak{M}$ 上の L^2-計量は、complete である。

このとき、次が成り立つ。

Theorem 3.3. *framed moduli space* $\mathfrak{M}$ には、S^1*-action* で次を満すものが存在する。

(3.4) 複素構造 $I_{\mathfrak{M}}$ に関して *holomorphic* であり、L^2-計量を保存する。

(3.5) *holomorphic symplectic form* $\omega_{\mathbb{C}}$ には、*weight 1* で働く。すなわち、$t \in S^1$ に対して、t が誘導する $\mathfrak{M}$ の *diffeomorphism* をそのまま t であらわしたとき、$t^*\omega_{\mathbb{C}} = t\omega_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。

(3.6) 対応する *moment map* を考えると、$\mathfrak{M}$ 上 *nonnegative* で *proper* な関数である。

(3.7) S^1*-action* は *holomorphic* な $\mathbb{C}^*$*-action* に拡張される。

この定理の証明には、2通りある。introduction で述べた ADHM description [KN] を用いる方法と、幾何学的な方法である。幾何学的な方法について方針を述べると、まず第一に (3.1) を用いて base space X 上に上に述べた (3.4)-(3.6) の性質をもつ作用が存在することを示す。つぎに、その作用が vector bundle E に lift できることを示す。このとき、connection を引き戻すことによって、framed moduli space に S^1-action が定義される。性質 (3.4),(3.5) が満されることは、tangent space が $d_A^+ \oplus d_A^*$ の kernel であることを使えば、base space への作用の対応する性質からすぐに導か

れる。(3.6) だけが少し難しいが、Uhlenbeck の compactness theorem を用いて示される。(See [Na4, 4.5].) (3.7) の $\mathbb{C}^*$-action に拡張することは、Theorem 2.7 を使って示される。

この S^1-action の応用として、framed moduli space の homology が Morse theory によって計算される。fを moment map としよう。このとき、grad f が、S^1-action の generating vector field になる。特に、f の critical points は S^1-action の fixed points である。点 x を出発する gradient flow は、$\mathbb{C}^*$-action を使って、$t \mapsto e^{-t}.x$ で与えられる。性質 (3.6) により gradient flow はコンパクト集合に留まって、極限が必ず存在する。$\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_N$ を fixed point set の connected component とする。各 $\mathfrak{F}_n$ は部分多様体である。F_iにおける f の index を $d(n)$ とする。このとき、Frankel [Fr], Bialynicki-Birula[BB], Carrell-Sommese [CS], Atiyah [A], Kirwan [Ki] らの結果によって、$d(n)$ は必ず偶数であり、f は perfect な Morse function になる。すなわち、

$$H_i(\mathfrak{M}; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{n=1}^{N} H_{i-d(n)}(\mathfrak{F}_n; \mathbb{Z})$$

が成り立つ。[Na4] では、ADHM description を通じて、$\mathfrak{F}_n$の homology を Kirwan の方法[Ki] で計算することができた。[Na3] では、base space が A_n-型のときに、function f を perturb して index は偶数になるようにしたまま、critical point が有限個の点から成るようにすることができた。次の結果を得ることができた。

Theorem 3.8. 仮定 (3.1), (3.2) のもと、*framed moduli space* $\mathfrak{M}$ の *homology group* は、*torsion free* であって、奇数次で消える。

ここまでのところ、性質 (3.5), (3.7) は使われていないが、次の節で重要な役割りをする。

4. Lagrangian subvarities

この節でも、(3.1), (3.2) を仮定する。

Morse function f による gradient flow で、各点は fixed point に流されていったが、今度は、$-f$による gradient flow を考える。それは $\mathbb{C}^*$-action を用いて、$t \mapsto e^t.x$ で与えられる。一般の点は、無限遠へ飛んでいってしまうが、コンパクト集合に留まる点もある。そこで、

$$\mathfrak{L} \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathfrak{M} \mid \lim_{t\to\infty} e^t.x \text{ が存在する。}\}$$

を考える。$\mathfrak{L}$ は fixed point set を含み、上式の極限が存在するとすれば、fixed point set に入っていなければいけないことは明らかである。

fixed point set の分解に応じて、

$$\mathfrak{L}_n \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in \mathfrak{L} \mid \lim_{t\to\infty} e^t.x \in \mathfrak{F}_n\}$$

とおくと、$\mathfrak{L} = \bigcup_n \mathfrak{L}_n$であって、各 $\mathfrak{L}_n$の closure は $\mathfrak{L}$ の irreducible component になる。

さらに次が成り立つ。

Theorem 4.1. $\mathfrak{L}$ は(一般には *singular* な) *holomophic symplectic structure* $\omega_{\mathbf{C}}$ に関する *Lagrangian subvariety* であり、$\mathfrak{M}$ と *homotopy* 同値である。

証明は、[Na2] で与えられているが、simple なのでここにもう一度繰り返す。

Proof. まず、tangent space が isotropic であることを示す。x を $\mathfrak{L}$ の点とし、tangent vectors v, w は、$\mathfrak{L}$ に接しているとしよう。このとき、性質 (3.5) により

$$\omega_{\mathbf{C}}(t_*v, t_*w) = t\omega_{\mathbf{C}}(v, w) \qquad \text{for } t \in \mathbb{C}^*$$

が成り立つ。$t \to \infty$ の極限を考えると、右辺は $\omega_{\mathbf{C}}(v, w)$ が 0 でないとすると無限大に発散する。ところが、$\mathfrak{L}$ は t が無限大に行くときに収束するような点の集合であることから、左辺は収束しなければならない。よって、$\omega_{\mathbf{C}}(v, w) = 0$ すなわち、tangent space は isotropic である。

次に $\mathfrak{L}$ の次元が、$\mathfrak{M}$ の次元の丁度半分であることを示す。$\mathfrak{L}$ から特に S^1-action の fixed point をとり、そこで tangent space の次元を計算すれば十分である。x を fixed point とすると、tangent space $T_x\mathfrak{M}$ は S^1-module となる。weight が i の weight space を V_i とおこう。symplectic form $\Omega_{\mathbf{C}}$ が、(3.5) の性質を持つことから、

$$\dim V_i = \dim V_{1-i}$$

が成り立つ。よって、

$$\sum_{i\le 0} \dim V_i = \sum_{i>0} \dim V_i = \frac{1}{2}\sum_i \dim V_i$$

を得る。ここで、$\mathfrak{L}$ は $t \to \infty$ のときに $e^t.y$ が収束するような点であるから、x における tangent space は、

$$T_x\mathfrak{L} = \bigoplus_{i\le 0} V_i$$

で与えられる。よって、上式によりその次元は、$\mathfrak{M}$ の次元の丁度半分である。 □

Lagrangian subvariety $\mathfrak{L}$ は、resolution $\pi: X \to \mathbb{C}^2/\Gamma$ における exceptional set $\pi^{-1}(0)$ と次のように共通点を持つ。

Theorem 4.2. 原点 0 を頂点とする *cone* である *affine algebraic variety* $\mathfrak{M}_0$ と *proper holomorphic map* $\Pi: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}_0$ が存在して、

(4.3) Π は、$\mathfrak{M}_0$ の *resolution of singularities* である。

(4.4) $\mathfrak{L} = \Pi^{-1}(0)$ が成り立つ。

幾何学的には、$\mathfrak{M}_0$ は、$\mathbb{C}^2/\Gamma$上の ASD connection の framed moduli space の L^2-metric に関する完備化として与えられる。写像 Π の定義には ADHM description が用いられるので、幾何学的に説明することができないが、Theorem 2.7 を用いて $\mathfrak{M}$ を X 上の holomorphic vector bundle の framed moduli space と思い、holomoprhic vector bundle を正則写像$\pi: X \to \mathbb{C}^2/\Gamma$ を通じて、$\mathbb{C}^2/\Gamma$ に "push down" して得られると思われる。

5. Representations of Simple Lie Algebras

この節でも、(3.1) は仮定する。(3.2) はより強い次の仮定に置き換えられる。

(5.1) 無限遠における Γ の表現 ρ を既約成分に分解したときに、trivial representation の成分を持たない。

(5.2) 次の空間が trivial である。

$$L^2\text{-}\operatorname{Ker}(d_A^+ \oplus d_A^*): \Omega^1(E) \to \Omega^+(E) \oplus \Omega^0(E)$$

条件 (5.2) は、index theorem によって、c_1, k, ρに関する条件に書きかえることができ、特に ASD connection A の取り方にはよらず、framed moduli space に対する条件と思うことができる。上の (5.1),(5.2) から (3.1) が導かれることは、[KN, 9.2 and Remark following 9.2] から分かる。

この節では、(5.1),(5.2) を満たす複数の vector bundle について対応する framed moduli space を考え、それらの間の対応を用いて simple Lie algebra の表現を幾何学的に構成する。

§1 の McKay correspondence により、Γ の nontrivial irreducible representaion ρ_i は、対応する simple Lie algebra の simple root に対応している。よって、上の条件

(5.1) のもと、ρ は、dominant weight の空間の元と思うことができる。$\rho = \bigoplus_{i=1}^{n} \rho_i^{\oplus w_i}$ と既約分解したときに、$\mathbf{w}$ という vector を

$$\mathbf{w} = {}^t(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$$

によって定め、これを Γ の表現や dominant weight と思うことにする。

§1 の resolution の exceptional set と Dynkin 図式の対応によって、exceptional set の irreducible component と simple root の間にも一対一対応がある。irreducible components $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ によって、base space の homology group $H_2(X; \mathbb{Z})$ に basis が定まる。これにより、

$$\mathbf{u} = {}^t(c_1(E)[\Sigma_1], \ldots, c_1(E)[\Sigma_n]) \in \mathbb{Z}^n$$

という vector を定める。これは、weight lattice の元と思うことができる。

条件 (5.2) により、instanton number k は、$c_1(E)$ と ρ により定まるので、対応する framed moduli space を単に $\mathfrak{M}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ で表わしてしまうことにする。しかし、条件 (5.2) を課さないと $c_1(E)$, ρ だけでは k が決まらないことをもう一度注意しておく。

以下、この節の終りまで、$\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ は Theorem 2.7 によって holormorphic vector bundle の framed moduli space と思うことにする。parabolic holomorphic vector bundle の framed moduli space $\mathfrak{P}_i(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ を次のように定義する。まず、data $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ に対応する hermitian vector bundle E を考える。その上の connection A で $\overline{\partial}_A \overline{\partial}_A = 0$ を満たすものと、E の Σ_i への制限の subbundle S であって、

(1) S は holomorphic structure $\overline{\partial}_A$ に関して、$E|\Sigma_i$ の holomorphic subbundle である。すなわち、S の section s に対し、$\overline{\partial}_A s$ が再び、S の section になる。
(2) quotient bundle $(E|\Sigma_i)/S$ は、Σ_i 上の degree が -1 の line bundle である。

この pair を complex gauge group $\mathcal{G}_0^{\mathbb{C}}$の自然な action で割つた商空間を $\mathfrak{P}_i(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ と定義する。subbundle S を忘れることによって、自然な写像$p_2 \colon \mathfrak{P}_i(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ が定義される。また、E の $\overline{\partial}_A$ に関して holomorphic vector bundle と思ったものを $\mathcal{E}$ と書き、Σ_i 上の degree -1 の line bundle を Σ_i の外で 0 とおいて拡張したものを $\mathcal{O}_{\Sigma_i}(-1)$ と書くことにする。$\mathcal{E}$ を Σ_i に制限してさらに、$(E|\Sigma_i)/S$ に落とすことによって exact sequence

$$\mathcal{E} \to \mathcal{O}_{\Sigma_i}(-1) \to 0$$

を得る。この kernel の holomorphic vector bundle を $\mathcal{E}'$ とおく。$\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}'$ は、Σ_i の外で同型であるから、特に無限遠における framing をもつ。これにより、写像 $p_1: \mathfrak{P}_i(\mathbf{u},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}(\mathbf{u}+\mathbf{C}\mathbf{e}^i,\mathbf{w})$ を得る。ここで、$\mathbf{e}^i$は第 i 成分が 1 でその他は 0 の vector であり、$\mathbf{C}$ は Cartan matrix である。よって、次の図式が与えられる。

$$\mathfrak{M}(\mathbf{u}+\mathbf{C}\mathbf{e}^i,\mathbf{w}) \xleftarrow{p_1} \mathfrak{P}_i(\mathbf{u},\mathbf{w}) \xrightarrow{p_2} \mathfrak{M}(\mathbf{u},\mathbf{w})$$

この図式は、底空間がリーマン面のときに Narashimhan - Ramanan [NR] によって導入された Heche correspondence の、高次元での analogue である。我々は、この図式も Hecke correspondence と呼ぶことにする。

Lemma 5.3.

$$p_2(p_1^{-1}(\mathfrak{L}(\mathbf{u}+\mathbf{C}\mathbf{e}^i,\mathbf{w}))) \subset \mathfrak{L}(\mathbf{u},\mathbf{w})$$

$\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ 上の constructible function 全体の成す空間を、$C(\mathbf{u},\mathbf{w})$ とする。$\mathbf{w}$ を fix し、$\mathbf{u}$ を動かすことによって、$\mathcal{C} = \bigoplus_{\mathbf{u}} C(\mathbf{u},\mathbf{w})$ とおく。このとき、上の補題により次によって operators を定義できる。

$$H_k: C(\mathbf{u},\mathbf{w})) \to C(\mathbf{u},\mathbf{w}); \quad H_k f = u_k f$$

$$E_k: C(\mathbf{u},\mathbf{w}) \to C(\mathbf{u}+\mathbf{C}\mathbf{e}^i,\mathbf{w}); \quad E_k f = (p_1)_!(p_2^* f)$$

$$F_k: C(\mathbf{u}+\mathbf{C}\mathbf{e}^i,\mathbf{w}) \to C(\mathbf{u},\mathbf{w})); \quad F_k g = (p_2)_!(p_1^* g),$$

これらの operator は、Hecke 作用素の geometric analogue である。

Theorem 5.4. *H_k, E_k, F_k は、C 上の operator として次の関係式を満たす。*

$$H_k H_l = H_l H_k,$$

$$H_k E_l - E_l H_k = c_{kl} E_l, \quad H_k F_l - F_l H_k = -c_{kl} F_l,$$

$$E_k F_l - F_l E_k = \delta_{kl} H_k,$$

$$\sum_{p=0}^{1-c_{kl}} (-1)^p \binom{1-c_{kl}}{p} E_k^p E_l E_k^{1-c_{kl}-p} = 0 \quad (k \neq l),$$

$$\sum_{p=0}^{1-c_{kl}} (-1)^p \binom{1-c_{kl}}{p} F_k^p F_l F_k^{1-c_{kl}-p} = 0 \quad (k \neq l).$$

但し、c_{kl}は、Cartan matrix $\mathbf{C}$ の成分である。よって、C は Γ に対応する simple Lie algebra の表現空間である。

証明には、ADHM description を用いた p_1, p_2 の fiber の詳しい記述による。ここでは省略する。

Lemma 5.5. $\mathbf{u}$ として $\mathbf{w}$ を取ると、対応する *framed moduli space* $\mathfrak{M}(\mathbf{w},\mathbf{w})$ は一点からなる。

これも ADHM description から容易に従うが、次元公式によって framed moduli space が 0 であることを示し、さらに只一つの点からなることを示すことができる。

$\mathfrak{M}(\mathbf{w},\mathbf{w})$ 上恒等的に 1 である関数を x であらわす。x に F_k を何回もほどこすことによって得られる関数の成す C の部分空間を L であらわし、$L \cap C(\mathbf{u},\mathbf{w})$ を $L(\mathbf{u},\mathbf{w})$ によって定義する。

Theorem 5.6. L は、Γ に対応する *simple Lie algebra* の *highest weight* が $\mathbf{w}$ の既約表現である。さらに、$L(\mathbf{u},\mathbf{w})$ は、*weight* が $\mathbf{u}$ の *weight space* である。

証明には、$F_k^{w_k+1}$ $(1 \le k \le n)$ で生成される left ideal によって x が消されることを示して得られる。

最後に、この表現と framed moduli space の topology との関連について述べる。$\mathfrak{L}(\mathbf{u},\mathbf{w})$ の irreducible component Y が与えられたとし、$L(\mathbf{u},\mathbf{w})$ に属する constructible function に対して Y の open dense subset 上での値を対応させることによって、$L(\mathbf{u},\mathbf{w})$ 上の linear functional を得る。そこで、$\mathfrak{L}(\mathbf{u},\mathbf{w})$ の irreducible components によって、中間の degree のホモロジー群 $H_{\mathrm{middle}}(\mathfrak{M}(\mathbf{u},\mathbf{w});\mathbb{Q})$ の basis が与えられていたことを思いだすと、

$$\Phi\colon L(\mathbf{u},\mathbf{w}) \to H^{\mathrm{middle}}(\mathfrak{M}(\mathbf{u},\mathbf{w});\mathbb{Q})$$

という linear map を得る。このとき次が成り立つ。

Theorem 5.7. 上の写像は、全ての $\mathbf{u}$ に対して同型写像である。

上の結果より、特に $H^{\mathrm{middle}}(\mathfrak{M}(\mathbf{u},\mathbf{w});\mathbb{Q})$ の次元が表現空間のウェイト空間の次元により与えられる。

References

[A] M.F. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[Ba] S. Bando, *Einstein-Hermitian metrics on non-compact Kähler manifolds*, Einstein metrics and Yang-Mills connections (T.Mabuchi and S. Mukai, eds.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 145, Mercel Dekker, New York, 1993, pp. 27–33.

[BB] A. Bialynicky-Birula, *Some theorems on actions of algebraic grops*, Ann. of Math. **98** (1973), 480–497.

[Br] E. Brieskorn, *Singular elements of semisimple algebraic groups*, Actes Congres Intern. Math., vol. 2, 1970, pp. 279–284.

[CS] J.B. Carrell and A.J. Sommese, *Some topological aspects of* $\mathbb{C}^*$ *actions on compact Kähler manifolds*, Comm. Math. Helv. **54** (1979), 567–582.

[Do] S.K. Donaldson, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987), 231–247.

[Fr] T. Frankel, *Fixed points and torsion on Kähler manifolds*, Ann. of Math. **70** (1959), 1–8.

[Ki] F.C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1985.

[Ko] S. Kobayashi, *Curvature and stability of vector bundles*, Proc. Japan Acad. **58** (1982), 158–162.

[Kr] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as a hyper-Kähler quotients*, J. Differential Geom. **29** (1989), 665–683.

[Kr2] ———, *A Torelli-type theorem for gravitational instantons*, J. Differential Geom. **29** (1989), 685–697.

[KN] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[Lü] M. Lübke, *Stability of Einstein-Hermitian vector bundles*, Manu. Math. **42** (1983), 245–257.

[Lu] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.

[Mc] J. McKay, *Graphs, singularities and finite groups*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., 1980, pp. 183–186.

[Na1] H. Nakajima, *Moduli spaces of anti-self-dual connections on ALE gravitational instantons*, Invent. Math. **102** (1990), 267–303.

[Na2] ———, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody Algebras*, preprint (1993).

[Na3] ———, *Homology of moduli spaces of instantons on ALE spaces (I)*, preprint (1992).

[Na4] ———, *Morse theorey on moduli spaces of instantons on ALE scalar-flat Kähler surfaces*, preprint (1993).

[NR] M.S. Narasimhan and S. Ramanan, *Deformation of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve*, Ann. of Math. **101** (1975), 391–417.

[Sl] P. Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Math. **815**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[UY] K. Uhlenbeck and S.T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. in Pure and Appl. Math. **39(S)** (1986), 258–293.